

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Директор Высшей школы
современной математики
А.Н. Соболевский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория Морса
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 84 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составил: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Теория Морса -- это раздел дифференциальной топологии, в котором установлена и изучается связь между топологическими характеристиками многообразия и поведение заданных на этом многообразии гладких функций в их критических точках. Курс представляет собой введение в теорию Морса.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Формирование знаний о теории Морса.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области дифференциальной топологии (теория Морса);
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов дифференциальной топологии с контекстом других математических дисциплин

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач
	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основы теории Морса и ее приложений в различных разделах дифференциальной топологии.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельного применения теории Морса к различным вопросам топологии дифференцируемых многообразий.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Локальная теория. Лемма Морса. Функции Морса и плотность функций Морса в пространстве всех функций на компактном многообразии.	4			10
2	Теоремы об изменении множеств меньших значений.	4			10
3	Функции Морса и клеточная структура на многообразиях с краем.	2			10
4	Теоремы о структуре алгебраических комплексов Морса.	2			10
5	Неравенства Морса для замкнутых многообразий и многообразий с краем.	4			10
6	Теория Морса и симплектическая геометрия.	4			10
7	Вырожденные критические точки.	2			8
8	Комплекс Морса.	4			8
9	Однопараметрическая теория Морса.	4			8
Итого часов		30			84
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Локальная теория. Лемма Морса. Функции Морса и плотность функций Морса в пространстве всех функций на компактном многообразии.

Локальная теория.

Лемма Морса.

Функции Морса и плотность функций Морса в пространстве всех функций на компактном многообразии.

2. Теоремы об изменении множеств меньших значений.

Теоремы об изменении множеств уровня (множеств меньших значений).

3. Функции Морса и клеточная структура на многообразиях с краем.

Функции Морса и клеточная структура на многообразиях с (возможно непустым) краем.

4. Теоремы о структуре алгебраических комплексов Морса.

Теоремы о структуре алгебраических комплексов Морса.

5. Неравенства Морса для замкнутых многообразий и многообразий с краем.

Неравенства Морса для замкнутых многообразий и многообразий с краем.

Сопутствующие алгебраические и комбинаторные результаты.

Двойственность Пуанкаре.

6. Теория Морса и симплектическая геометрия.

Теория Морса и симплектическая геометрия.

Гипотезы Арнольда.

Индекс Маслова.

7. Вырожденные критические точки.

Вырожденные критические точки.

8. Комплекс Морса.

Комплекс Морса.

Дискретная теория Морса-Формана.

9. Однопараметрическая теория Морса.

Однопараметрическая теория Морса.

Применения к лежандровым узлам и гипотезам Арнольда о вершинах.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Современная геометрия : Методы и приложения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко .— 5-е изд., испр. — М. : Эдиториал УРСС ; Добросвет, 2001 .— Т. 2 : Геометрия и топология многообразий. - 2001. - 296 с.

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Математика
профиль подготовки: Фундаментальная математика
Высшая школа современной математики
Высшая школа современной математики
курс: 4
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Экзамен

Разработчик: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач
	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория Морса» обучающийся должен:

знать:

Основы теории Морса и ее приложений в различных разделах дифференциальной топологии.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельного применения теории Морса к различным вопросам топологии дифференцируемых многообразий.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Локальная теория. Лемма Морса.
2. Функции Морса и плотность функций Морса в пространстве всех функций на компактном многообразии.
3. Теоремы об изменении множеств меньших значений.

4. Функции Морса и клеточная структура на многообразиях с (возможно непустым) краем.
5. Теоремы о структуре алгебраических комплексов Морса.
6. Неравенства Морса для замкнутых многообразий и многообразий с краем, сопутствующая алгебра и комбинаторика.
7. Двойственность Пуанкаре.
8. Теория Морса и симплектическая геометрия. Гипотезы Арнольда. Индекс Маслова.
9. Вырожденные критические точки.
10. Комплекс Морса. Дискретная теория Морса-Формана.
11. Однопараметрическая теория Морса, применения к лежандровым узлам и гипотезам Арнольда о вершинах.

Пример экзаменационного билета:

- 1) Неравенства Морса для многообразий с краем.
- 2) Индекс Маслова.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.